人口死亡的logit模型和双对数模型的比较研究

黄荣清

摘要 本文提出了用l(x)的双对数函数形式来表示两个人口死亡的联系模型。并从模型结构、参数意义和模型的精度把它和W. Brass提出的logit体系进行了比较。理论(模型)生命表的数据表明,在期望寿命较低的情况下,logit体系精度相对地要高一些;而在期望寿命高的情况下,则双对数模型精度要高一些;在婴幼儿期,logit模型的误差小于双对数模型,而在老年期,双对数模型的误差小于logit模型。从实际人口(日本人口)的生命表数据来看,双对数模型的稳定性要大大好于logit模型。

作者 黄荣清 首都经济贸易大学人口经济研究所研究员兼副所长。

自英国人口学者W. Brass在60年代末期提出了人口的logit模型,即任何两张人口生命表的x岁生存概率l(x)经过logit变换后相互成线性关系以后,人口死亡的logit模型已被广泛用于人口分析中。人口学者根据上述人口死亡的特征,进行人口统计数据的补正,人口死亡率的估计,人口预测等。但Brass在提出此模型之后,他本人及其它学者发现,该模型在描述两个人口死亡关系时,在年龄两端,即在儿童期和老年期,误差较大。于是,就有人在logit模型的基础上加以改进。改进的方法就是增加模型参数,变动模型结构。在这方面大家熟悉的有Basia Zaba(1979),D. C. Gwbank(1983)等的研究。

经过改进的人口死亡模型固然在描述两个人口死亡的相互关系上做得非常准确,但由于模型参数增加,模型结构的复杂化使这些模型在应用上受到了限制。因为,由于模型参数的增加,模型参数自身的意义及对它的估计就变得复杂;而由于模型结构的复杂,把人口死亡模型和其它人口模型“组合”也变得相当困难。在实际应用中,在许多场合下人们还宁可选择结构简单,参数估计方便的模型来代替理论上虽说完美,但结构复杂难以应用的模型。所以尽管已经有了改进的人口死亡模型,但人口死亡的logit模型并未失去它的价值,仍有广泛的应用范围。

本文在这里并不从改进logit体系的精度来着手,而是准备在保持两个参数的模型和数学结构基础上,对生存率函数l(x)的变换作一些变动,即对l(x)用双对数变换代替logit变换。观察并讨论经过这种变换后,模型反映人口死亡内容,模型精度以及它在应用范围上发生的变化。

一、双对数死亡函数模型

熟悉人口生命表的人都知道,设从出生到x岁的存活概率为l(x),若把l(x)看作是随时

间或年龄连续变化的变量，则 $l(x)$ 可以表示为：

$$l(x)=\exp(-\int_0^x u(y)dy) \tag{1}$$

这里 $u(x)$ 为 x 年龄点上的瞬间死亡率，或者说死亡速度，人口学常称为死亡力。

定义 $U(x)=\int_0^x u(y)dy$。从数学上说，$U(x)$ 为死亡力 $u(x)$ 的原函数，它是由从 0 到 x 的 $u(x)$ 的积分值，而积分从本来意义上说是求和，所以 $U(x)$ 为 $u(x)$ 从 0 到 x 年龄点上的和。在这里我们称之为死亡力的和函数，简称为死亡力和。由于引入了死亡力和这一概念，则(1)式可改写为：

$$l(x)=\exp(-U(x))$$

而 $$U(x)=\ln(1/l(x)) \tag{2}$$

由生存概率函数 $l(x)$ 的性质可以推知 $U(x)$ 具有以下性质：

①$U(x)$ 为单调上升函数

②$U(x)$ 值的变化范围为 $(0,+\infty)$

设两个不同生命表的死亡力和函数 $U(x)$ 和 $U0(x)$ 相互间有幂函数关系，即

$$U(x)=\beta_0 \cdot U_0^\alpha(x) \tag{3}$$

这里，β_0 和 α 为常数，且 $\beta_0>0,\alpha>0$。对(3)式两边取对数，则有

$$\ln(U(x))=\ln\beta_0+\alpha\ln U_{(x)}$$

$$=\beta+\alpha\ln U_0(x) \tag{4.1}$$

或者 $$\ln\ln(1/l(x))=\beta+\alpha\cdot\ln(1/l_0(x)) \tag{4.2}$$

由于(4.2)式中 $l(x)$ 和 $l_0(x)$ 经过两次对数运算成为线性关系，所以本文称之为双对数死亡模型。

现在我们来看一下 logit 体系死亡模型。在 logit 体系中，两个生存率函数经 logit 变换后成线性关系，所谓 logit 变换，即

$$\text{logit}\ (l(x))=\frac{1}{2}\ln(\frac{1-l(x)}{l(x)})=\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{l(x)}-1) \tag{5}$$

两个生存率函数经 logit 变换后有

$$\text{logit}(l(x))=\beta+\alpha\,\text{logit}(l_0(x)) \tag{6}$$

其中 β 和 α 是常数。从数学上说，(5)式右端的系数 1/2 并未多大作用，徒然增加结构的累赘罢了。因为如果(6)式有线性关系，则 $\ln(1/l(x)-1)$ 和 $\ln(1/l_0(x)-1)$ 也必然有线性关系，并且两者之间一次项的系数相同，只需常数项系数作相应的变动罢了。

这里，我们把

$$\ln(\frac{1}{l(x)}-1)=\beta+\alpha\ln(\frac{1}{l(x)}-1) \tag{7}$$

看成是 logit 死亡模型的同一种模型。由于

$$\frac{1}{l(x)}-1=e^{U(x)}-1$$

当 $U(x)$ 很小时 $e^{U(x)}-1\approx U(x)$

(7)式近似地为

$\ln U(x)=\beta+\alpha\ln U_o(x)$

即在年龄初端，由于 l(x)接近于 1，U(x)接近于 0，logit 模型和双对数模型表达的关系是非常接近的。

(7)式中的$\frac{1}{l(x)}$-1 和 $1/l_o(x)$-1 可以表示为幂函数的关系，即

$$\begin{aligned}1/l(x)-1&=\exp(\beta)(1/l_o(x)-1)^{\alpha}\\&=\beta_o(1/l_o(x)-1)^{\alpha}\end{aligned} \tag{8}$$

把(3)式、(4)式和(7)式、(8)式相比，这两个模型除了在对生存率函数 l(x)的变换不同外，在反映两个不同的人口死亡关系时形式是相同的，即两个生存率函数经过初次变换后成幂函数关系，变换后函数的对数成线性关系。

这里要指出的是，logit 模型和双对数模型的初次变换后反映的死亡函数意义是极不相同的，在 logit 模型中它的初次变换为

$$l(x)\rightarrow\frac{1}{l(x)}-1=\frac{1-l(x)}{l(x)} \tag{9}$$

(9)式右端$\frac{1-l(x)}{l(x)}$表示相对死亡概率(因为 1-l(x)表示死亡概率)所以 logit 模型反映的是两个人口相对死亡概率的关系。而双对数模型的初次变换为 $l(x)\rightarrow\ln(\frac{1}{l(x)})=U(X)$ (10)

(10)式右端表示死亡力和，是表示死亡风险的绝对大小，所以双对数模型反映的是两个人口的死亡力和的关系。可见，logit 模型和双对数模型虽然在形式上极为相似，但反映的内容却有所不同。

我们知道，对两个数的相对值进行加减乘除的四则运算是没有意义的，但对两个数本身可以用加减运算来表示数的增加、减少。即 U(x)本身可对它进行分解或合成，同时还可乘上某个数表示它增加的倍数，这一些运算 1/e(x)－1 都不能。这就使双对数模型在反映死亡变动时增加了它的表现力。

二、人口死亡的 logit 模型和双对数模型精度的比较。

所谓模型精度，就是根据模型中确定的关系，由已知的实际数据，从一方估计另一方，观察估计值和实际值的差别。如果差别(误差)较小，则认为精度较高，反之，则认为精度较低。

首先，我们用寇尔—德蒙尼(Coale & Demeny)的分区模型生命表的数据来比较。寇尔—德蒙尼的模型生命表是按西、北、东、南四个不同地区(类型)，分成 25 个死亡水平，以女性期望寿命为基础，从 20 岁到 80 岁每隔 2.5 岁给出的。本文为了计算方便，用的不是原始数据，而是由联合国编制的 Mortpark—软件包产生的数据。比较方法是选取模型生命表中两个不同期望寿命(设为 e_i 和 e_j)的生存概率函数 $l_i(x)$h 和 $l_j(x)$，以其中一个(如 $l_i(x)$)为基准，对 logit 模型(式(7))和双对数模型(式(4.2))，用最小二乘法估计模型中的参数 α、β，并由此计算 $l_j(x)$的估计值 $\hat{l}_j(x)$，模型的误差为：

$$\triangle_{ij}=\sqrt{\sum(l_j(x)-\hat{l}_j(x)^2)/n} \tag{11}$$

寇尔—德蒙尼模型生命表中以西方死亡类型最为常用。表 1 是西方死亡类型(男性)中期望寿命从 59 岁到 75 岁的两个模型的误差。观察表 1 的数据，我们可以发现如下现象：

①模型的精度同基准的死亡水平和被估计的死亡水平有关。例如，以期望寿命为 59 岁的 $l_{59}(x)$为基准来估计期望寿命 60 的 $l_{60}(x)$的误差和以期望寿命为 64 岁的 $l_{64}(x)$为基准估计期

望寿命 65 岁的 $l_{65}(x)$的误差不同，以 $l_{59}(x)$估计 $l_{65}(x)$的误差也不同。

②基准的死亡水平同被估计的死亡水平越接近，则误差越小，即以 $l_{59}(x)$估计 $l_{60}(x)$的误差要比 $l_{59}(x)$估计 $l_{65}(x)$的误差要小；

③模型误差具有累积现象。即若设 $e_j>e_i$，则$\triangle_{ij}=\triangle_{i,i+1}+\triangle_{i+1,i+2}+\cdots\triangle_{j-1,j}$。以表 1 中第 2 列和第 4 列数据为倒，$\triangle_{59,60}=0.6$，$\triangle_{60,61}=0.6$，$\triangle_{61,62}=0.7$，$\triangle_{59,62}=0.6+0.6+0.7=1.9$。

④随着基准和被估计对象期望寿命的提高，logit 模型的误差有增大趋势，而双对数模型的误差变动较小，且有缩小趋势。在表 1 中，作为基准的期望寿命为 64 岁时，估计 65 岁的 $l_{65}(x)$时，两个模型的误差几乎相等。当基准的期望寿命和被估计生命表期望寿命小于 64 岁，logit 模型误差小于双对数模型，而当基准和被估计的生命表的期望寿命大于 64 岁时，logit 模型的误差大于双对数模型。

两个人口死亡模型用于模式生命表西方死亡类型男性时出现的上述现象，在女性和其它死亡类型中也同样存在。由表 1 可以看出，两个模型精度的差别特征主要反映在上述第四点，如果把两个模型有相同的误差$\triangle_{i,i+1}$的死亡水平(e_i)作为死亡类型和性别的特征，则一般来说，在寇尔—德蒙尼的模式生命表中，北方类型的 e_i 和西方类型接近，东方类型的 e_i 要小于西方类型，南方类型要大于西方类型；女性和男性相比，e_i 值要大一些。

对联合国发展中国家模型生命表的 5 个类型进行比较，同样可以发现上述现象。

无论是寇尔—德蒙尼分区模型生命表和联合国发展中国家模型生命表，其中的数据可以说是理论数据，即在这些生命表中数据都是经过某种数学加工，如修匀、光滑处理后的结果。所以它们的变化比较稳定。下面我们以一个实际人口为例，来看一下 logit 模型和双对数模型的精度情况。

以日本人口第 1 次简略生命表（1947．4—1948．3）到第 40 次简略生命表（1986．4—1987．3）的数据为基础，分别以 logit 模型和双对数模型从上一次生命表的 $l_i(x)$推算下一次人口生命表 $l_{i+1}(x)$，得到的模型误差见图 1。

表 1　　logit 模型和双对数模型的误差比较

单位(‰)

期望寿命(岁)	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$S\triangle_1$	$S\triangle_2$
60	0.6	0.9	0.6	0.9
61	0.6	0.9	1.2	1.7
62	0.7	0.9	1.9	2.6
63	0.7	0.9	2.6	3.5
64	0.8	0.9	3.4	4.4
65	0.9	0.9	4.2	5.4
66	1.0	0.8	5.1	6.0
67	0.8	0.7	5.9	6.6
68	0.8	0.8	6.6	7.4
69	0.9	0.8	7.5	8.3
70	0.9	0.8	8.3	9.1
71	1.0	0.8	9.2	9.9
72	1.1	0.8	10.2	10.7
73	1.1	0.8	11.2	11.4
74	1.2	0.8	12.2	12.1
75	1.3	0.8	13.4	12.8

注(1):比较用的生命表为寇尔—德蒙尼分区模型生命表中西方死亡类型(男性),期望寿命为59岁—75岁。生命表中数据是由UN的Mortpark—软件包产生的。

注(2):误差计算公式为

$$\triangle=\sqrt{\sum(l_x-\hat{l}_x)2/n}$$

这里,lx为生命表上原值,$\hat{l}$x为估计值,n为年龄组数。

注(3):△表示以期望寿命为(J—1)估计期望寿命(J)产生的误差,S△表示以59岁估计期望寿命(J)产生的误差。$\triangle_1$,S$\triangle_1$表示用logit模型产生的误差,$\triangle_2$,S$\triangle_2$表示用双对数模型产生的误差。

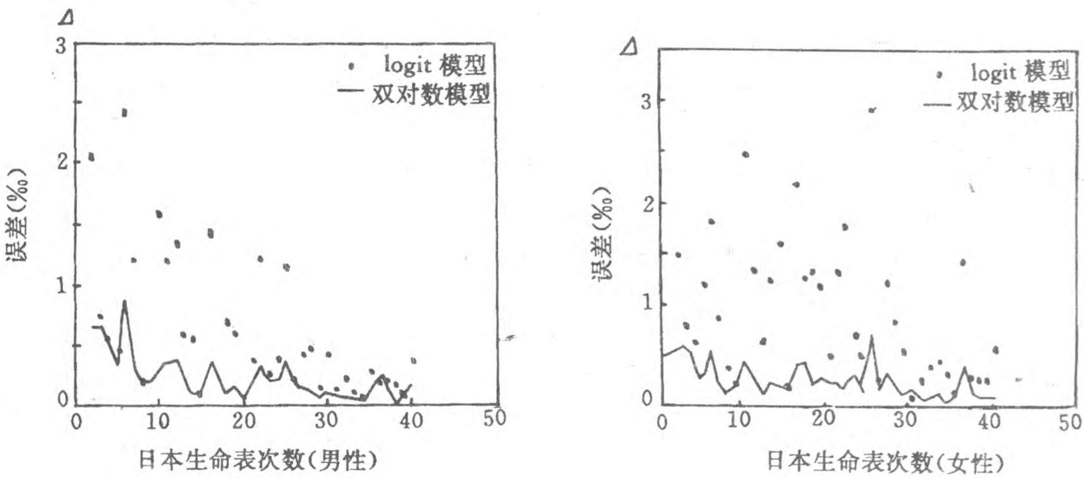

图1 logit模型和双对数模型用于日本人口生命表的误差。

注:这里说的误差指根据模型关系,用上一次生命表$l_{i-1}(x)$估计下一次生命表$l_i(x)$,误差值为

$$\triangle=\sqrt{\sum(l_i(x)-\hat{l}_i(x))^2/n}$$

资料来源:由《第40回简速静止人口生命表》(日本厚生省人口问题研究所编)算出。

日本第一次简略生命表的期望寿命男性为51.54岁,女性为55.28岁,到第40次简略生命表时,男性期望寿命为75.42岁,女性为81.25岁。在这时间间隔为40年,期望寿命差近20岁的变动中,用双对数模型估计的误差总是很小,且在很小的范围内变动,而logit模型的误差忽大忽小,在大部分情况下,其误差要大于双对数模型。

三、logit模型和双对数模型误差的年龄分布

上述人口死亡模型的建立目的是要正确表现两个人口死亡力的相互关系,从主观上说,我们希望模型的精度越高越好,但人口死亡由于受多种复杂因素影响,有相当大的随机性,这样就不可避免地出现与"规律"不一致的地方,即出现误差。实际上再完美的模型也不可能百分之百和客观事物及其变化完全符合。根据研究的需要,只要模型产生的误差在我们允许的范围内,那么,我们就可认为该模型是好的模型。从表1的数字看,无论logit模型和双对数模型在一定的死亡水平范围内,它们的误差都是相当小的,从这个角度看它们都是表现人口死亡的较好的模型。

能把误差控制在一定范围内,这是对模型要求的一个方面,对模型另一个要求是不希望它

有系统误差，即模型的误差主要不是由于模型构造上产生的，而主要是由随机因素影响造成的。判断模型构造上是否存在问题，我们可以从它的误差分布是否有随机性来判断。

但在本文引言中就已经说过，logit 模型的误差分布呈“两头大，中间小”，即在老幼两端误差较大，中间年龄误差较小的特点，而由表 1 中数字可知，模型的误差具有累积现象，由此可见 logit 模型的误差不是随机的，而是结构性的。

本文在前面已经说过，双对数模型从形式上与 logit 模型极其相似，从实际资料的比较中我们也发现，它的误差年龄分布与 logit 模型也很类似，这就叫人想起造成这种结构误差是可否从它们的模型形式来说明。

为了阐明这一点，我们可从实际人口死亡力的变动来解释。

首先，这两个模型的构造都有如下形状：

$l_n V(x)=\beta+\alpha l_n V_o(x)$

或 $V(x)=e^{\beta}V_o^{\alpha}(x)=(\beta_o V_o(x))^{\alpha}$ (12)

这里，当模型采用 logit 形式时，$V(x)=1/l(x)-1$，用双对数模型时，$V(x)=\ln(1/l(x))$。显然，无论采用那一种模型 $V(x)$ 都为单调上升函数，函数值的变化范围为 $(0,+\infty)$。同一人口在死亡水平 V_o 变化到 V 时，由经验知道，在大多数场合下，当死亡力下降时，有 $V_o(x)\geqslant V(x)$，$\alpha>0,\beta<0,\beta_o<1.0$；当死亡力上升时，有 $V_o(x)\leqslant V(x)$，$0<\alpha<1.0,\beta>0,\beta_o>1.0$。

以死亡力下降为例，(12)式右端中 β_o 可看作死亡力平均下降程度，因此被称之为死亡水平参数，α 反映死亡力下降对不同年龄影响程度。由于 $V(x)$ 不同，α 也不同，所以可看作是结构参数，或者说模式参数。对于呈幂函数形式的 $V(x)$ 来说，存在 $x=x_0$，使 $\beta_o V_o=1$，或 $V(x_o)=1/\beta$ 时，$V(x_o)=V_o(x_o)$。由于 $\alpha>1$，$V(x)=(\beta_o V_o(x))^{\alpha}$ 的值随年龄上升的速度比 $V_o(x)$ 快，则必然存在一年龄点 x_1，使

$V(x_1)=(\beta_o V_o(x_1))^{\alpha}=V_o(x_1)$ 对上式关于 α,β_o 解出，可得

$V_o(x_1)=(1/\beta_o)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$

上述结果可以归纳以下几种情况：

当 $x<x_o$ 时 $V(x)<\beta_o V_o(x)$ (13.1)

$x_o<x<x_1$ 时 $\beta_o V_o(x)<V(x)<V_o(x)$ (13.2)

$x>x_1$ 时 $V(x)>V_o(x)$ (13.3)

当我们说到死亡力下降时，一般指的是对任意 x，总有 $l(x)\geqslant l_o(x)$ 或 $V(x)\leqslant V_o(x)$ 所以不应出现如(13.3)的情形。即在 $x>x_1$ 时模型 $V_{(x)}$ 值和 $V_{(x)}$ 真值不一致，自然地，存活概率的估计值和实际值也不一致。即是说，无论是 logit 模型还是双对数模型在 $x>x_1$ 时都不适合。

在实际人口数据分析中，我们考虑的年龄范围是有限的，例如 85 岁以内，大的一般也不超过 100 岁。如果 x_1 很大，即超过或靠近所考虑的年龄尾数，则模型的缺陷就可能不明显，甚至遮盖起来。由经验数据可知，在两个模型中，x_1 值一般都较大，所以在 $x>x_1$ 范围可以不加考虑。

在 (x_o,x_1) 范围内，估计值 $V(x)$ 不但低于死亡力的平均下降值 $\beta_o V_o(x)$，且由于 $V(x)$ 逐渐接近 $V_o(x)$，意味着在这年龄段估计的人口死亡力上升得非常快，甚至超过了变动前的死亡力。这也可能和死亡力下降不一致，即在这些年龄段用 $V_{(x)}$ 估计 $V_o(x)$ 很可能不一致，换句话说，当 $x>x_o$ 也是极容易造成模型误差的地方。

如果 x_o 比较大，即靠近我们考虑的年龄区间范围以内，或者在这些年龄上 $V(x)$，$V_o(x)$ 值不大，即在参数估计时所占的比重不大，则也不致于造成大的模型误差。由实际经验数据可知，

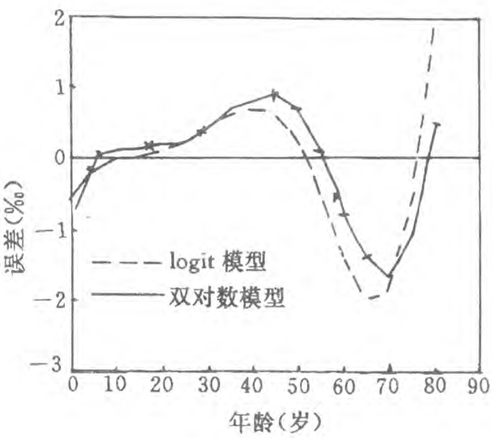

图 2 logit 模型和双对数模型误差的年龄分布

注:资料来源见表 1 中注(1),这里是用期望寿命 64 岁的 $l_{64}(x)$ 估计期望寿命 65 岁的 $l_{65}(x)$ 产生的误差,x 岁误差的计算为: $\triangle = l(x) - \hat{l}(x)$

双对数模型的 x_0 一般要比 logit 模型要推迟,而在老龄部分,双对数模型对 l(x)的变换值要比 logit 模型要小得多,这样双对数模型在老年部分的误差要小于 logit 模型的误差。

图 2 是由寇尔—德蒙尼模型生命表中西方死亡类型男性由期望寿命 64 岁的生命表推算期望寿命 65 岁的两个模型误差的年龄分布。由表 1 可知,这两个模型的平均误差是几乎相等的,但两个模型误差在年龄分布上大小很不一致,(图 2)它们的误差较大的都在老年部分,但 logit 模型在老年部分的误差明显大于双对数模型。

在本文第二部分中说过,表 1 中用的模型生命表是来自 Mortpark—软件产生的生命表,该软件产生的生命表最后一个开区间年龄为 85 岁。如果把 85 岁再延长,两个模型的精度又会发生什么样的变化呢?由于 logit 模型在老年部分误差特别大,则可以猜想随着年龄区间的延长,logit 模型的精度也会变小。例如使用寇尔—德蒙尼生命表第二版中(开区间年龄为 100)数据,西方死亡类型从死亡水平 20 推算 21,期望寿命为 63.64 岁变到 66.03 岁,则 logit 模型的误差 8.1‰,双对数模型为 4.1‰。由于误差具有累积的性质,根据表 1 的数字,从 64—66 岁死亡误差累积数字 logit 模型为 2.7‰,双对数模型为 2.6‰。可见,由于年龄区间的增大,两个模型的误差都会增大,但 logit 模型比双对数模型的误差增加要大得多。

小结

本文利用生命表数据,对人口死亡的 logit 模型和双对数模型的精度做了比较。研究的结果表明,这两个模型各有千秋,不能简单地说哪一个模型的精度一定比那一个高,而只能说,在不同的死亡类型,不同死亡水平,不同场合下某一个模型的精度要更高一些。

logit 模型在人口分析中已得到了广泛的应用,但双对数模型在人口分析中的作用尚未被人们认识。本文的研究表明,双对数模型在人口死亡的表现形式上,在模型精度的稳定性上都要优于 logit 模型。虽然在平均期望寿命较低的情况下,logit 模型的精度要小于双对数模型,但在平均期望较高的场合,双对数模型精度却要高于 logit 模型,考虑到目前世界上发达国家的死亡力已经非常低,一些新兴的工业国也已属于低死亡力国家,甚至一些发展中国家,如我国那样,死亡力也已降到较低水平,即使那些目前有较高死亡力的国家,他们的死亡力也正在迅速下降,所以双对数模型较 logit 模型的优越之处将日益显露。

在一些场合下,双对数模型的精度要高于 logit 模型,这一现象早在 10 年前笔者已经觉察,但未加以系统阐述,现归纳整理出来,供有兴趣的研究者共飨。 (下转第 9 页)

得了明显管理成效的部门、单位和个人，各级政府应当给予奖励；而对那些未认真履行职责，管理工作任务完成不好，以致出现这样那样问题的部门、单位和个人，要给予惩戒，包括纪律处分和物质处罚。有了这样的激励和制约，才能有效地调动有关部门、单位和人员的积极性，切实搞好暂住人口的管理。

（五）保证宏观协调控制，从机制上强化管理

从宏观上建立起对暂住人口的调节控制机制，将暂住人口流动控制在一定时间、一定地域、一定对象之中，是加强和改善暂住人口管理带有根本性的措施。只有这样，才能做到管而不死，流而不乱，使管理工作顺应经济发展的需要。这方面需要做的工作还相当多。

其一、应加强对农村剩余劳动力跨地区流动就业的调控和管理，提高劳动力跨地区流动的组织化、有序化程度。应加快乡镇就业服务网络建设，开展有组织的劳务输出；抓紧建立区域劳动力市场信息网络，加强省际间劳务协作；实行按就业需求信息发放证卡的办法，开展有效的管理服务，以逐步形成"信息导向、按需流动、凭证管理、全程服务"的宏观调控机制。

其二、应把暂住人口的管理与城镇工业发展和基础设施建设协调起来，加强宏观规划管理。要搞好调查研究和预测分析，根据工业和城建发展的需要规划可容纳暂住人口的数量，根据这个数量扩建暂住人口的活动场所和服务设施，增强城镇的负荷能力，既防止城镇基础设施"超载"，又可以为暂住人口提供良好的生活条件，也便于加强对他们的管理，达到全面放开、计划管理、管而不抑的局面。

其三、应有计划地在大中城市周围建立起一些具有地方特色的卫星城镇。从大中城市中扩散出一些生产项目和技术设备发展卫星城镇，形成一个缓冲带，吸引更多的暂住人口到小城镇去，充分发挥其截留、收蓄暂住人口的功能，以达到分流暂住人口的目的。

（上接第 16 页）

参考文献：

Brass, W. and others. The Demogaphy of Tropical Africa, Princeton, Princeton University Press, 1968

Basia Zaba, The Four-Parameter Logit Life Tables System, Population Studies, 1979, Vol 33. NO. 1

D. C. Ewbank and others, A Reducible Four Parameter System of Model Life Tables, Population Studies, 1983 Vol 37.

Coale, A. and P. Demeny, Reginal Model Life Tables and Stable Population, Second Editon, Academic Press. 1983

United Nations, Mortpak, United Nations Publication. 1988

United Nations, Model Life Tobles for Developing, Countries United Nations Publication. 1982

日本厚生省人口问题研究所，1988，第 40 回简速静止人口生命表，日本人口问题研究所资料第 250 号

黄荣清　生命表的数理模型——两个生命函数的关系　日本大学《经济集志》，1987. 4.